6.18 Def: Eine elementare Zeilentransformation erzeugt aus
$A \in Mat_K(m \times n)$ eine neue Matrix
$A' \in Mat_K(m \times n)$ durch ...

(Vertauschen) Vertauschen zweier Zeilen,

oder

(Skalieren) Skalarmultiplikation einer Zeile mit einem $s \in K^*$!$s \neq 0$!

oder

(Addieren) Addition des s-fachen einer Zeile zu einer anderen Zeilen ($s \in K$).

Eine Zeilentransformation ist eine Verkettung endlich vieler elementarer Zeilentransformationen.

Analog: (elementare) Spaltentransformationen

6.19 Def: Elementarmatrizen

$$E_{k\leftrightarrow \ell} := \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccccc} & & & & k & & & & \ell & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & & & \\ & & & & 0 & & & & 1 & & \\ & & & & & 1 & & & & & \\ & & & & & & 1 & & & & \\ & & & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & & & 1 & & \\ & & & & 1 & & & & 0 & & \\ & & & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ k \\ \\ \\ \\ \\ \ell \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

Einträge:

$e_{k\ell} = e_{\ell k} = 1$

$e_{ii} = 1 \quad \forall i \neq k, \ell$

sonst 0

$$E_{s\cdot k} := \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & & & & k & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & s & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ k \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$(s \in K^*)$

$e_{kk} = s \in K^*$

$e_{ii} = 1 \quad \forall i \neq k$

sonst 0

$$E_{k s \ell} := \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccccc} & & & & k & & & & & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & & & & \\ & & & & 1 & & & & & & & \\ & & & & & 1 & & & & & & \\ & & & & & & 1 & & & & & \\ & & & & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & & & & 1 & & & \\ & & & & s & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \ell \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$(s \in K, \; k \neq \ell)$

$e_{\ell k} = s \in K$

$e_{ii} = 1 \quad \forall i$

sonst 0

6.20 Satz: Die elementaren Zeilentrafos entsprechen Linksmultiplikation mit den Elementarmatrizen:

$E_{k\leftrightarrow l}\cdot A$ geht aus A durch Vertauschen der Zeilen k & l hervor

$E_{s\cdot k}\cdot A$ geht aus A durch Multipl. von Zeile k mit s hervor.

$E_{\substack{\boxed{k\ s}\\ l}}\cdot A$ geht aus A durch Addieren des s-fachen von Zeile k zu Zeile l hervor.

Die analog definierten elementaren Spaltenoperationen entsprechen Rechtsmultiplikation mit Elementarmatrizen:

$A\cdot E_{k\leftrightarrow l}$ geht aus A durch Vertauschen der Spalten k & l hervor

$A\cdot E_{s\cdot k}$ geht aus A durch Multipl. von Spalte k mit s hervor.

$A\cdot E_{k\boxed{\substack{s\\ l}}}$ geht aus A durch Addieren des s-fachen von Spalte l zu Spalte k hervor.

Beweis: Für beliebige $A \in Mat_K(\ell \times m)$, $B \in Mat_K(m \times n)$ ist nach Def.

$$(\text{Zeile } i \text{ von } A \cdot B) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} (\text{Zeile } j \text{ von } B)$$

$$(\text{Spalte } k \text{ von } AB) = \sum_{j=1}^{m} (\text{Spalte } j \text{ von } A) \cdot b_{jk}$$

Rechne nun durch, z.B.

$$\left(\text{Zeile } \ell \text{ von } E_{k \, \ell}^{\, s} \cdot A\right) = \sum_{j=1}^{m} e_{\ell j} (\text{Zeile } j \text{ von } A)$$

$$= s \cdot (\text{Zeile } k \text{ von } A)$$

$$+ 1 \cdot (\text{Zeile } \ell \text{ von } A)$$

usw. $\square$

6.21 Korollar: Die Elementarmatrizen sind invertierbar:

$$(E_{k \leftrightarrow \ell})^{-1} = E_{k \leftrightarrow \ell}$$

$$(E_{s \cdot k})^{-1} = E_{s^{-1} \cdot k}$$

$$(E_{k \, \ell}^{\, s})^{-1} = E_{k \, \ell}^{\, -s}$$

Beweis:

$$E_{k \leftrightarrow \ell} \cdot E_{k \leftrightarrow \ell} = (\mathbb{1}_n \cdot E_{k \leftrightarrow \ell}) \cdot E_{k \leftrightarrow \ell} \overset{6.20}{=} \mathbb{1}_n$$

usw. $\square$

Korollar 6.22:

Zeilen- und Spaltenoperationen ändern den Rang einer Matrix nicht.

Beweis.

Nach Satz 6.20 reicht es zu zeigen: ist A beliebige Matrix und sind E_1, E_2 invertierbare Matrizen, so ist

$$rk(A) = rk(E_1 \cdot A \cdot E_2)$$

In linearen Abbildungen übersetzt heißt das:

$$rk(f) = rk(i_1 \circ f \circ i_2)$$

für beliebige lineare Abb. f, Isomorphismen i_1, i_2.

$$\begin{tikzcd}
V' \arrow[r, "i_1", "\cong"'] \arrow[d, phantom, "\parallel"] & V \arrow[r, "f"] \arrow[d, phantom, "\parallel"] & W \arrow[r, "i_2", "\cong"'] \arrow[d, phantom, "\parallel"] & W' \arrow[d, phantom, "\parallel"] \\
\Big(K^n \arrow[r, "f_{E_1}"'] & K^n \arrow[r, "f_A"'] & K^m \arrow[r, "f_{E_2}"'] & K^m \Big)
\end{tikzcd}$$

Es ist $rk(f) = rk(f \circ i_1)$, denn

$$im(f) = im(f \circ i_1).$$

Es ist $rk(f \circ i_1) = rk(i_2 \circ f \circ i_1)$, denn i_2 lässt sich einschränken zu einem Isomorphismus

$$\begin{tikzcd}
im(f \circ i_1) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, phantom, sloped, "\subseteq"] & im(i_2 \circ f \circ i_1) \arrow[d, phantom, sloped, "\subseteq"] \\
W & W'
\end{tikzcd}$$

$\square$

6.23 Def.: Für ein LGS $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$ nennen wir

$$(A \mid \underline{b})$$

zugehörige **erweiterte Matrix**.

6.24 Korollar:
Die Lösungsmenge eines LGS ändert sich durch Zeilentransformationen nicht:

geht $(A' \mid \underline{b}')$ aus $(A \mid \underline{b})$ durch eine Zeilentrafo hervor, so ist

$$\mathcal{L}(A' \mid \underline{b}') = \mathcal{L}(A \mid \underline{b}).$$

Beweis:
Nach Satz 6.20 ist

$$(A' \mid \underline{b}') = E \cdot (A \mid \underline{b})$$

für ein Produkt von Elementarmatrizen E. Nach Notiz 6.22 ist E invertierbar. Also gilt:

$$A' \cdot \underline{x} = \underline{b}' \underset{E\cdot}{\overset{E^{-1}\cdot}{\rightleftarrows}} A \cdot \underline{x} = \underline{b}$$

$E \cdot A \cdot \underline{x} = E \cdot \underline{b}$

$\square$

6.25 Def.

Matrix in Zeilenstufenform (ZSF):

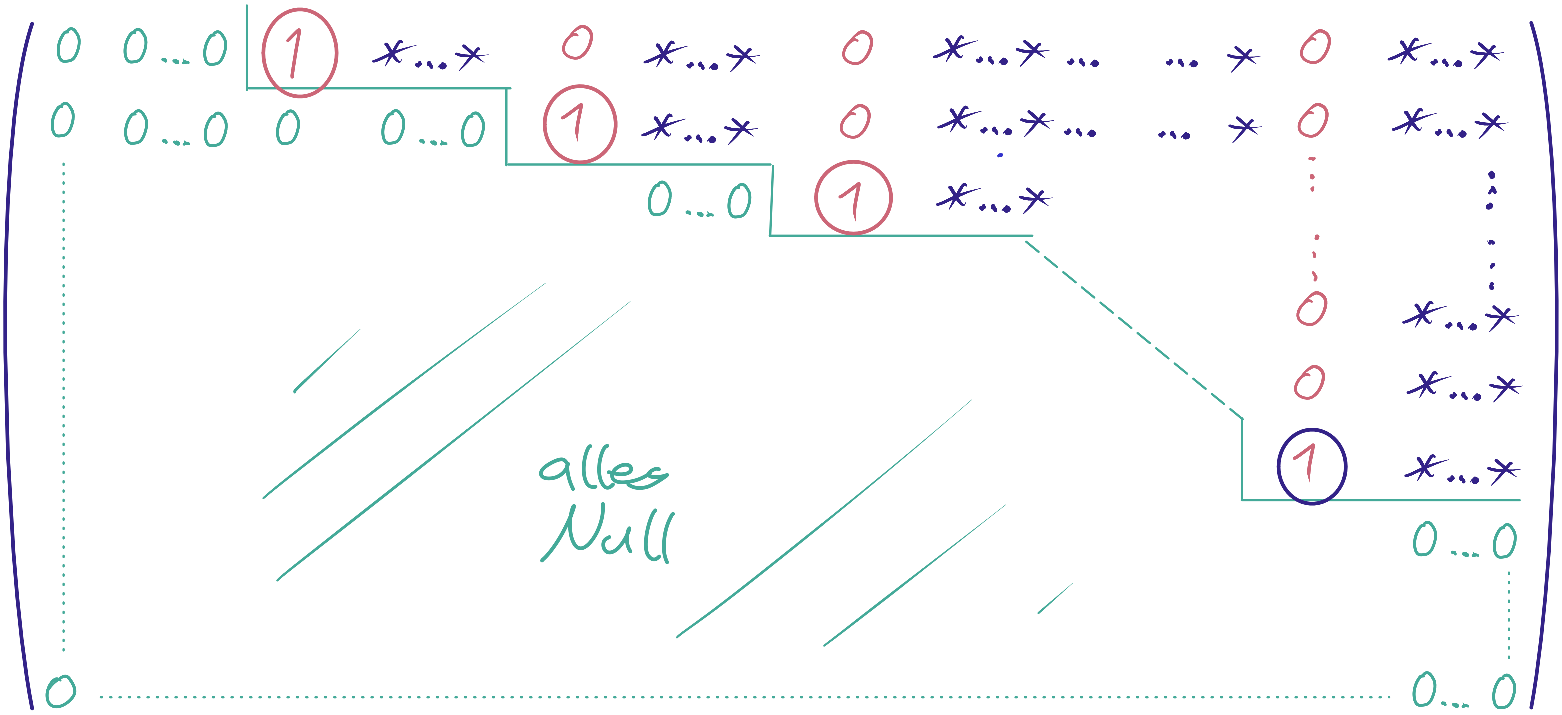
$$
\begin{pmatrix}
0 & 0\ldots0 & a_1 & *\ldots* & * & *\ldots* & * & *\ldots* \ldots & \ldots * & * & *\ldots* \\
0 & 0\ldots0 & 0 & 0\ldots0 & a_2 & *\ldots* & * & *\ldots* \ldots & \ldots * & * & *\ldots* \\
\vdots & & & & & 0\ldots0 & a_3 & *\ldots* & & & \vdots \\
\vdots & & & & & & & & & * & *\ldots* \\
\vdots & & & \text{alles} & & & & & & * & *\ldots* \\
\vdots & & & \text{Null} & & & & & & a_r & *\ldots* \\
\vdots & & & & & & & & & & 0\ldots0 \\
0 & \cdots & & & & & & & & & 0\ldots0
\end{pmatrix}
$$

$a_i \neq 0$

„Die Anzahl der führenden Nullen steigt von Zeile zu Zeile (solange sie steigen kann)."

Die Einträge a_i heißen Pivot-Elemente.

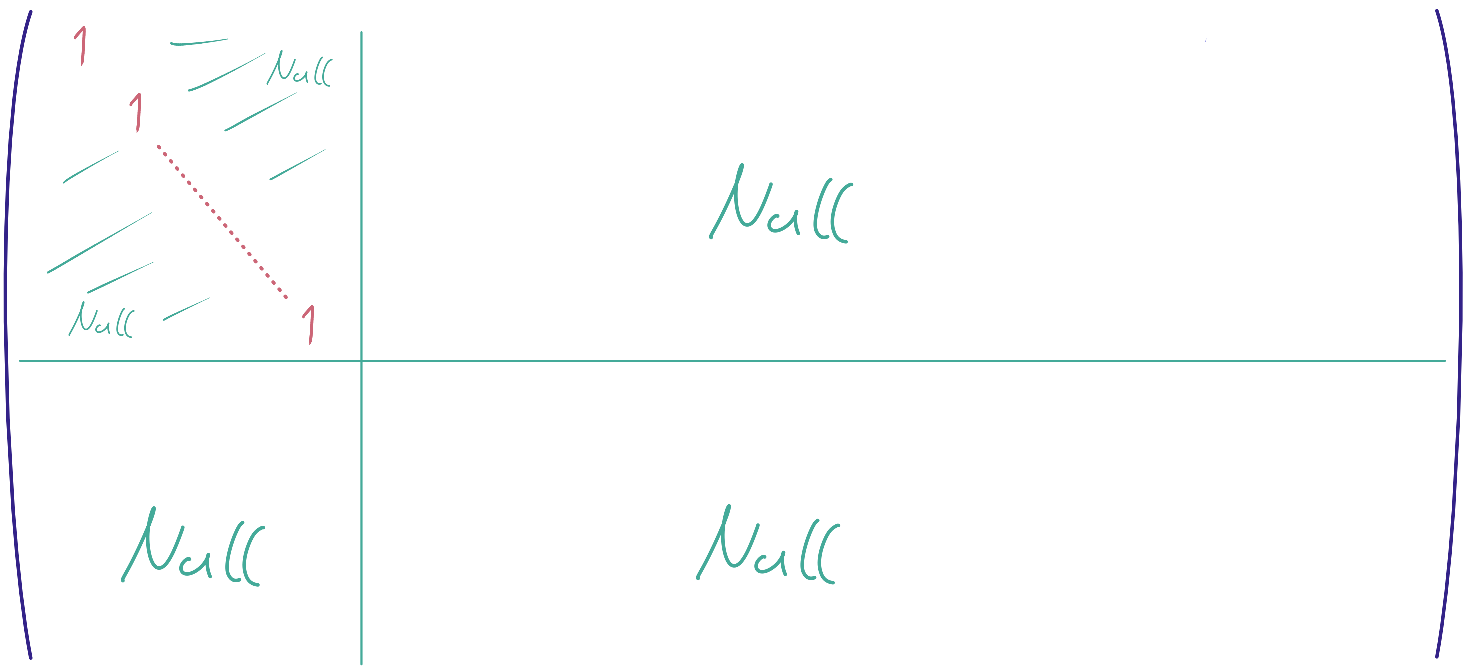
Zeilennormalform (ZNF):



Zeilenstufenform + Pivot-Elemente = 1
+ Nullen über Pivots

Spaltenstufenform/-normalform analog

Normalform:



6.26 Satz:

(a) Jede Matrix lässt sich durch eine Zeilentransformation auf Zeilennormalform bringen.

(b) Jede Matrix lässt sich durch Zeilen- und Spaltentransformation auf Normalform bringen.

Konstruktiver Beweis:
Gaußsches Eliminationsverfahren

Sei $A = (a_{ij})$ gegebene Matrix.

SCHRITT 1: Zeilenstufenform (mit Pivots $= 1$)

Falls $A = 0$: FERTIG.

Falls $A \neq 0$:

Sei Spalte j die erste Spalte $\neq \underline{0}$.

Nach (Vertauschen) von Zeilen können wir annehmen: $a_{1j} \neq 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc} 0 & \cdots & 0 & \overset{\neq 0}{\tilde a_{1j}} & * & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots & \tilde a_{2j} & * & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \tilde a_{mj} & * & \cdots & * \end{array}\right) \quad \Big| \cdot \tilde a_{1j}^{-1}$$

Nach (Skalieren) von Zeile 1 mit a_{1j}^{-1} können wir annehmen: $a_{1j} = 1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc} 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots & \tilde{a}_{2j} & * & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \tilde{a}_{mj} & * & \cdots & * \end{array}\right) \quad \cdot(-\tilde{a}_{2j}) \ \cdots \ \cdot(-\tilde{a}_{mj})$$

(Addiere) für $i = 2, \dots, m$ das $-\tilde{a}_{ij}$-fache von Zeile 1 zu Zeile i:
Wir erhalten:

$$\left(\begin{array}{ccc|c|ccc} 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * \\ \hline \vdots & & \vdots & 0 & & & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & A' & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & & & \end{array}\right)$$

Wiederhole nun Verfahren für A'.
Da A' weniger Spalten hat als A sind wir nach endlich vielen Iterationen FERTIG.

SCHRITT 2: Zeilennormalform

lässt sich nun durch weitere Zeilentrafos vom Typ (Addiere) erreichen.

— Damit ist (a) bewiesen. —

SCHRITT 3: Normalform

Nach (Vertauschen) von Spalten können wir annehmen, dass Matrix folgende Gestalt hat:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & * & \cdots & * \\ & 1 & & \vdots & & \vdots \\ & & \ddots \; 1 & * & \cdots & * \\ \hline & 0 & & & 0 & \end{array}\right)$$

Durch (Addieren) von Spalten kommen wir nun auf Normalform. $\square$

Beispiel:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \Big| \cdot \tfrac{1}{2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \cdot 0 \qquad \cdot(-3)$$

$$\left(\begin{array}{c|cc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{cl}\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} & \frac{3}{2}\end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ – Zeilenstufenform

$$\begin{array}{cl}\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & -\frac{1}{2}\end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ – Zeilennormalform

$$\begin{array}{c}\begin{array}{ccc} -1 & -1 & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ – Normalform